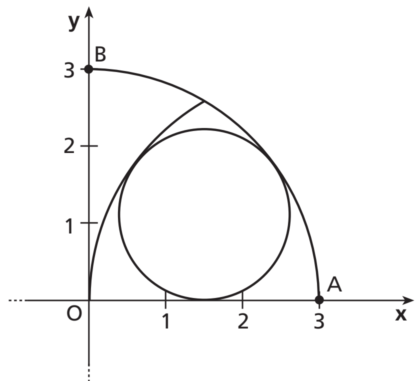
PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento *Oxy* sono assegnati l'arco di circonferenza di centro *O* ed estremi $A(3;\, 0)$ e $B(0;\, 3)$ e l'arco *L* della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto *A* e il punto $\left(0;\, \frac{3}{2}\right)$.

1. Sia *r* la retta tangente in *A* a *L*. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui *r* divide la regione *R* racchiusa tra *L* e l'arco *AB*.
2. La regione *R* è la base di un solido *W* le cui sezioni, ottenute tagliando *W* con piani perpendicolari all'asse *x*, hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di *W*.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di *R* intorno all'asse *x*.
4. Si provi che l'arco *L* è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco *AB* e all'asse *x*. Infine, tra le circonferenze di cui *L* è il luogo dei centri, si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro *A* e raggio 3, come nella figura a lato.



▲ **Figura 1.**

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la parabola di equazione $x^2 = 9 - 6y$; la sua forma esplicita è $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, ha vertice $V\left(0; \frac{3}{2}\right)$ e interseca il semiasse positivo delle ascisse nel punto $A(3; 0)$.

La retta r tangente alla parabola nel punto A per la formula dello sdoppiamento ha equazione:

$$\frac{y+0}{2} = -\frac{1}{6}\cdot 3x + \frac{3}{2} \to y = -x + 3.$$

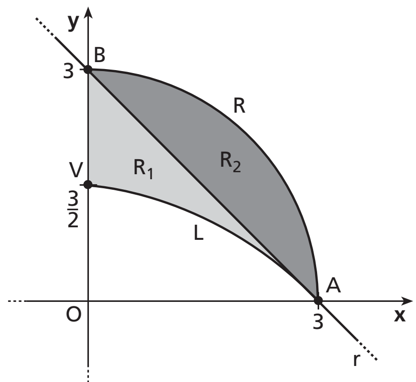
Tale retta interseca l'asse y nel punto $B(0; 3)$.

Rappresentiamo in figura 7 l'arco di circonferenza di centro l'origine e di estremi A e B, l'arco L di parabola di estremi A e V, la retta tangente r.

La parte di piano R, delimitata dai due archi, viene suddivisa dalla retta r in due parti, R_1 e R_2.

Calcoliamo l'area della regione R_1 come differenza tra l'area del triangolo AOB e l'area della regione OAV corrispondente alla metà dell'area del segmento parabolico Vale quindi:

$$\mathcal{A}(R_1) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\left(6\cdot\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$



▲ **Figura 7.**

Troviamo l'area della regione R_2 come differenza tra l'area del settore circolare $A\widehat{O}B$ e l'area del triangolo AOB. Risulta allora:

$$\mathcal{A}(R_2) = \frac{1}{4}\cdot(3^2\pi) - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}.$$

2. Considerato il solido W, di base la regione R e le cui sezioni, perpendicolari all'asse x, hanno area $S(x) = e^{5-3x}$, per $0 \leq x \leq 3$, tale solido ha volume di valore:

$$V(W) = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x}dx = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}(e^{-4} - e^5) = \frac{e^9 - 1}{3e^4}.$$

3. Consideriamo il solido Q ottenuto dalla rotazione della regione R intorno all'asse x (figura 8).

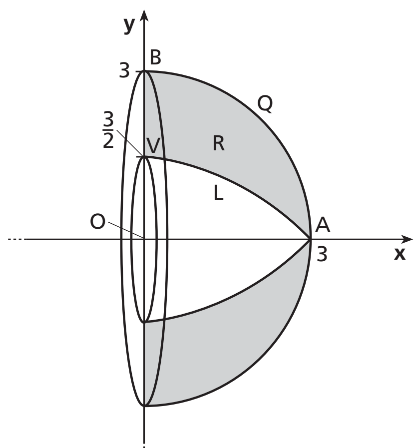
Il relativo volume $V(Q)$ si ottiene come differenza tra il volume della semisfera di centro O e raggio OA e il volume del solido ottenuto dalla rotazione dell'arco di parabola L intorno all'asse x:

$$V(Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\right) - \pi\int_0^3\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\int_0^3(-x^2 + 9)^2 dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\int_0^3(x^4 - 18x^2 + 81)dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right]_0^3 =$$



▲ **Figura 8.**

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\left(\frac{243}{5} - 162 + 243\right) = 18\pi - \frac{\pi}{36} \cdot \frac{648}{5} = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi.$$

4. Consideriamo il settore circolare AOB e una generica circonferenza di centro $C(x; y)$, con $0 < x < 3$ e $0 < y < 3$, tangente internamente all'arco AB e all'asse x (figura 9).

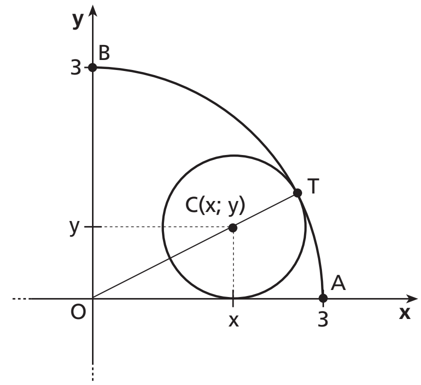
Per la condizione di tangenza interna deve valere l'uguaglianza:

$$\overline{OC} + \overline{CT} = \overline{OA}.$$

Poiché $\overline{CT} = y$, allora vale

$$\overline{OC} + \overline{CT} = \overline{OA} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 6y + y^2 \rightarrow x^2 = 9 - 6y \rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}.$$



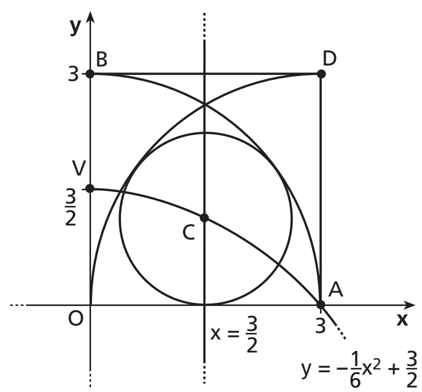
▲ **Figura 9.**

Pertanto il luogo dei centri corrisponde all'arco di parabola L di partenza.

Infine, consideriamo tale luogo, $C\left(x; -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)$ e imponiamo che la circonferenza in esso centrata sia anche tangente alla circonferenza centrata in A e con raggio uguale a 3 (figura 10).

Si osserva che gli archi di circonferenza AB e OD sono simmetrici rispetto all'asse mediano $x = \frac{3}{2}$, così la circonferenza $\mathscr{C}$ tangente a entrambi gli archi ha centro su tale asse. Pertanto per $x = \frac{3}{2}$ risulta:

$$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right) \text{ con raggio } r = \frac{9}{8}.$$



▲ **Figura 10.**