ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:
1) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2) supposto che gli spigoli AB e MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC e MNP a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4) calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC e MNP;
5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

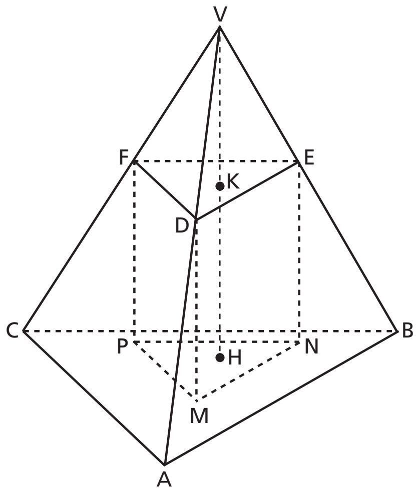
PROBLEMA 1

A) Nella figura 1 sono disegnati la piramide triangolare regolare, di base *ABC* equilatera e altezza *VH*, e il prisma triangolare inscritto nella piramide, di base *DEF* equilatera e altezza $KH = \frac{1}{2}VH$.

La piramide triangolare di vertice *V* e base *DEF* è simile alla piramide di base *ABC* e vertice *V*, con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$ per ipotesi, pertanto i volumi delle due piramidi hanno rapporto $k^3 = \frac{1}{8}$:

$$\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{8}\mathrm{Vol}_{ABCV}.$$

Ora, la piramide *DEFV* ha base e altezza congruenti al prisma inscritto di partenza: essa è quindi equivalente alla terza parte del prisma cioè $\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{3}\mathrm{Vol}_{\text{prisma}}$. Sostituendo alla relazione precedente si trova:



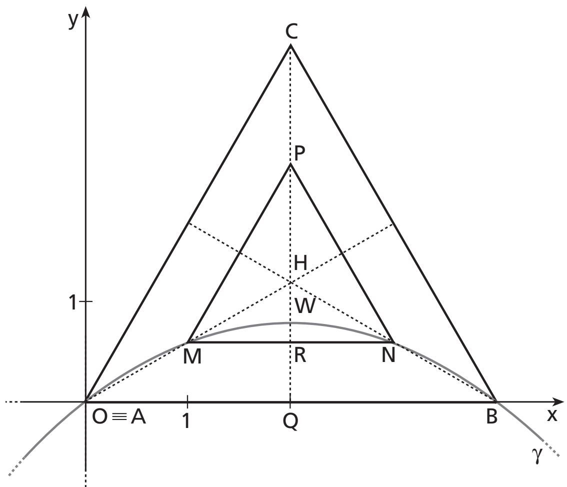
▲ **Figura 1.**

$$\frac{1}{3}\mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{1}{8}\mathrm{Vol}_{ABCV} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{3}{8}\mathrm{Vol}_{ABCV}.$$

In conclusione, il volume del prisma inscritto è $\frac{3}{8}$ del volume della piramide *ABCV*.

B1) Nel punto A) si è osservato che i triangoli equilateri *MNP* e *ABC* sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$. Se il lato di *ABC* misura 4 cm, il lato di *MNP* è lungo 2 cm.

B2) Nella figura 2 sono rappresentati i triangoli *ABC* e *MNP* nel sistema di assi cartesiani come richiesto.



◀ **Figura 2.**

I punti A e B hanno coordinate $A(0; 0)$ e $B(4; 0)$; il punto C ha ascissa $\frac{x_A + x_B}{2} = 2$ e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero ABC, ovvero $2\sqrt{3}$. Pertanto $C(2; 2\sqrt{3})$. Il punto H è ortocentro, incentro, baricentro del triangolo equilatero ABC e del triangolo equilatero MNP: esso divide la mediana CQ in due parti, una doppia dell'altra, per cui $H\left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Per il rapporto di similitudine tra i due triangoli, risulta poi che M è punto medio di AH, come N lo è di BH e P di CH. Attraverso la formula del punto medio di un segmento si trova: $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(3; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P\left(2; \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

B3) Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$.

Poiché la parabola passa per i punti $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ e $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, si ottiene il sistema in a, b, c:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a + b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}x$. Essa passa per il punto N poiché tale punto è simmetrico al punto M della parabola, rispetto all'asse di simmetria. Si può verificare anche algebricamente che le coordinate di N soddisfano l'equazione della parabola:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 3 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della parabola.

B4) Si valuta dapprima l'area della superficie S_1 intercettata dal triangolo MNP sulla parabola che ha vertice $W\left(2; \frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$. Per la formula del segmento parabolico si trova:

$$S_1 = \frac{2}{3}\,\overline{WR} \cdot \overline{MN} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 2 = \frac{4}{27}\sqrt{3}.$$

L'area S_2 della parte restante del triangolo MNP si calcola per differenza, tenendo conto che l'area del triangolo vale $S_{MNP} = \frac{1}{2} 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$. Si ottiene:

$$S_2 = \sqrt{3} - \frac{4}{27}\sqrt{3} = \frac{23}{27}\sqrt{3}.$$

In maniera analoga si trovano le aree delle parti in cui la parabola divide il triangolo ABC.
Il segmento parabolico di base AB ha area:

$$S_3 = \frac{2}{3}\,\overline{WQ} \cdot \overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{32}{27}\sqrt{3}.$$

L'area S_4 della parte restante del triangolo ABC si calcola per differenza, tenendo conto che l'area del triangolo vale $S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4\sqrt{3}$. Quindi:

$$S_4 = 4\sqrt{3} - \frac{32}{27}\sqrt{3} = \frac{76}{27}\sqrt{3}.$$

B5) La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero MNP ha centro nel circocentro H del triangolo e raggio $r = \overline{HP}$, cioè $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (figura 3).

Tale circonferenza coincide con la circonferenza inscritta nel triangolo equilatero ABC. Infatti quest'ultima ha centro in H e ha raggio $r' = \overline{HQ}$, cioè $r' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

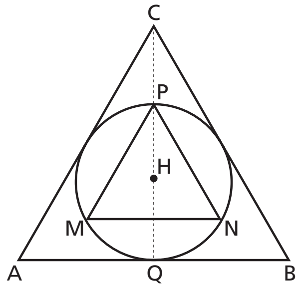


Figura 3.