PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r di equazioni:

λ: $x^2 = 4(x - y)$ e r: $4y = x + 6$.

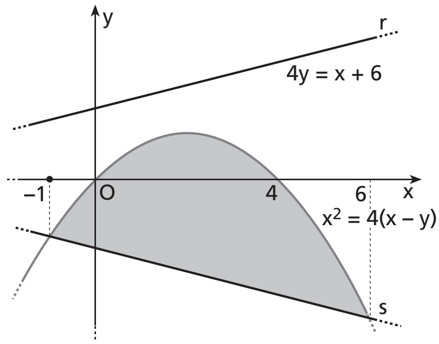
1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

PROBLEMA 1

1. Mettiamo a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 4y = x+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2} \\ x^2 = 4x - x - 6 \end{cases}$$

In forma normale la seconda equazione è $x^2 - 3x + 6 = 0$, e ha discriminante $3^2 - 4 \cdot 6 < 0$, quindi non ci sono soluzioni in campo reale.



▲ **Figura 1.**

2. La distanza di un punto $(x_0; y_0)$ da una retta $ax + by + c = 0$ è $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Per imporre che $(x_0; y_0)$ appartenga alla parabola basta sostituire x_0 e y_0 nell'equazione della parabola. Si ha: $y_0 = x_0 - \dfrac{1}{4}x_0^2$. Sostituendo nella formula della distanza si trova:

$$\frac{\left| x_0 - 4\left(x_0 - \dfrac{1}{4}x_0^2\right) + 6 \right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|x_0^2 - 3x_0 + 6|}{\sqrt{17}}$$

Il minimo della distanza si avrà, quindi, in corrispondenza del minimo della funzione a numeratore, cioè in $x_0 = \dfrac{3}{2}$. Il punto P ha quindi coordinate $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{15}{16}\right)$.

3. La simmetria rispetto all'asse x ha equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, che sono uguali alle loro inverse, quindi la retta s ha equazione $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$. Le intersezioni della retta s con la parabola si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{2} \\ y = x - \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases}$$

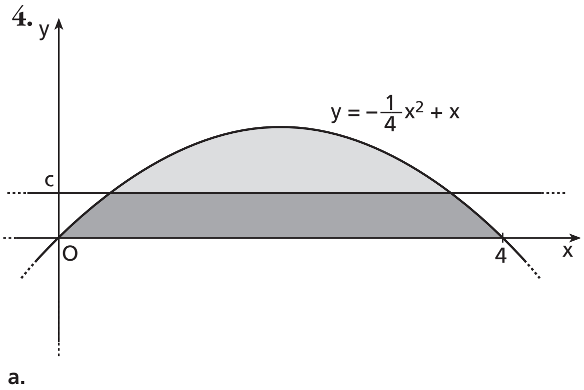
Le soluzioni della seconda equazione sono $x = -1$ e $x = 6$.
L'area della regione di piano definita da due curve e dalle rette $x = a$ e $x = b (b > a)$ è

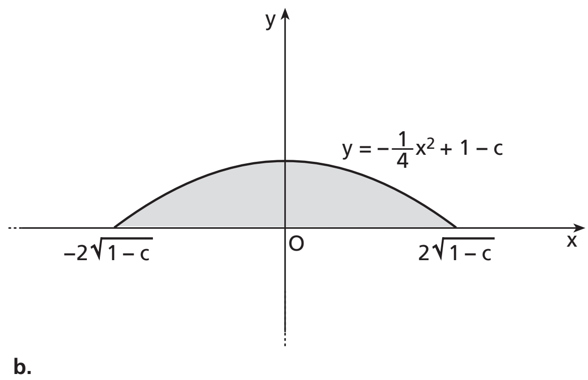
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

In questo caso

$$\int_{-1}^{6} \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right] dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{6} = \frac{343}{24}.$$

4.





L'area della regione superiore in cui viene divisa la regione S dalla retta $y = c$ ha area pari all'integrale tra i due punti di intersezione dell'asse x della parabola λ traslata verso il basso di c. Per semplificare i calcoli si può operare un'ulteriore traslazione (a sinistra di 2, cioè dell'ascissa del vertice) per portare il vertice sull'asse y. Le equazioni della traslazione composta sono dunque $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - c \end{cases} = \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + c \end{cases}$, quindi l'equazione della parabola trasformata è, omettendo gli apici, $y = -\frac{x^2}{4} + 1 - c$. Le intersezioni con l'asse x sono in $x = \pm 2\sqrt{1-c}$, quindi l'area risulta $2\int_0^{2\sqrt{1-c}} \left[-\frac{x^2}{4} + 1 - c\right] dx = 2\left[-\frac{x^3}{12} + (1-c)x\right]_0^{2\sqrt{1-c}} = \frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}}$ perché la funzione è pari.

Tale area deve essere pari alla metà dell'area della regione S, che si ottiene sostituendo $c = 0$, quindi $\frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{8}{3}$. Risolvendo si ottiene $c = 1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

5. Tale volume è l'integrale del quadrato della funzione associata a λ tra 0 e 4.

$$\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2}x^3 + x^2\right) dx = \left[\frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{15}$$