ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$.

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

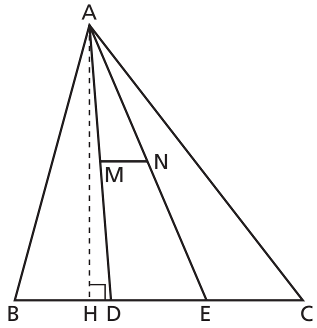
b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

PROBLEMA 2

a) Compiuta la costruzione (figura 4), si applica una proprietà conseguenza del teorema di Talete al triangolo *ADE*: una retta, che determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato. Pertanto, essendo $AM : MD = AN : NE = 1$, *MN* è parallelo a *BC* e il quadrilatero *DENM* è un trapezio. I triangoli *AMN* e *ADE* sono simili per il primo criterio e il rapporto di similitudine vale $\frac{1}{2}$. Ne consegue che il rapporto tra le aree risulta $\frac{1}{4}$, quindi: $S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ADE}$ e quindi $S_{DENM} = \frac{3}{4} S_{ADE}$.



▲ **Figura 4.**

Osservando i tre triangoli *ABD*, *ADE* e *AEC*, in cui è diviso il triangolo *ABC*, essi hanno base e altezza rispettivamente congruenti. Sono quindi equivalenti. Si può scrivere allora $S_{ADE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, che, sostituita all'ultima relazione trovata, porta all'espressione:

$$S_{DENM} = \frac{3}{4} S_{ADE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

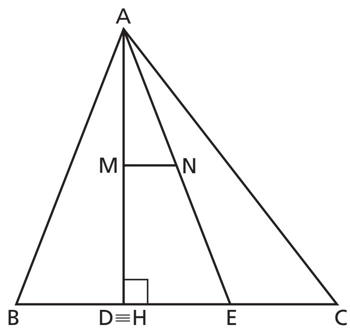
b) Poiché l'area del quadrilatero *DENM* è un quarto dell'area del triangolo *ABC*, quest'ultimo ha superficie $90a^2$. Si può ricavare l'altezza *AH*:

$$\overline{AH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{AH} = \frac{2 \cdot 90a^2}{15a} = 12a.$$

Si applichi il teorema di Pitagora al triangolo *ABH*:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} \rightarrow \overline{BH} = \sqrt{169a^2 - 144a^2} = 5a.$$

Risulta $\overline{BH} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ e quindi $H \equiv D$. Il trapezio *DENM* è dunque rettangolo (figura 5).



▲ **Figura 5.**

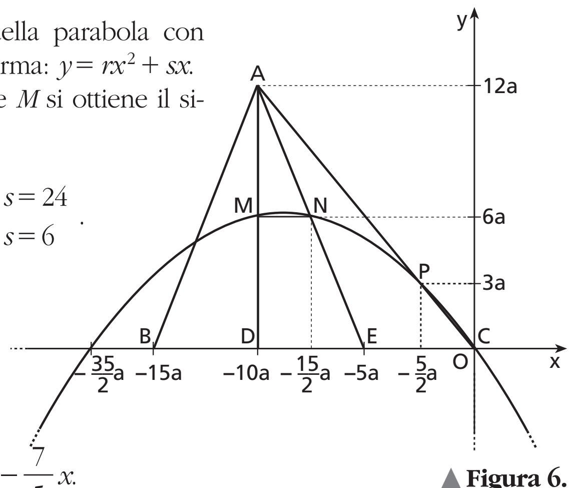
c) Si ponga un sistema di assi cartesiani come nella figura 6, con $O \equiv C$.
Dai dati geometrici precedenti le coordinate dei punti sono:

$$A(-10a; 12a),\ M(-10a; 6a),\ N\left(-\frac{15}{2}a; 6a\right),\ B(-15a; 0),\ D(-10a; 0) \text{ e } E(-5a; 0).$$

Vista la scelta del sistema cartesiano l'equazione della parabola con asse di simmetria perpendicolare al lato *BC* è della forma: $y = rx^2 + sx$.
Imponendo alla funzione il passaggio per i punti *N* e *M* si ottiene il sistema a due incognite:

$$\begin{cases} 6a = r\left(-\dfrac{15}{2}a\right)^2 + s\left(-\dfrac{15}{2}a\right) \\ 6a = r(-10a)^2 + s(-10a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 225a \cdot r - 30 \cdot s = 24 \\ 100a \cdot r - 10 \cdot s = 6 \end{cases}.$$

Risolvendo si ricava la soluzione $\begin{cases} r = -\dfrac{2}{25a} \\ s = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$.



▲ **Figura 6.**

L'equazione della parabola è pertanto: $y = -\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x$.
Nella figura 6 è tracciata la parabola.

d) Osservando la figura 6, si nota che la curva interseca il segmento AC oltre che nel punto $O(0;\,0)$ anche in un ulteriore punto P, di cui è necessario calcolare le coordinate.

La retta passante per A e C ha equazione $y=-\dfrac{6}{5}x$.

Il sistema $\begin{cases} y=-\dfrac{6}{5}x \\ y=-\dfrac{2}{25a}x^2-\dfrac{7}{5}x \end{cases}$ ha soluzioni $(0;\,0)$ e $P\left(-\dfrac{5}{2}a;\,3a\right)$.

Si calcolano le aree delle figure mistilinee in cui la parabola divide il triangolo ADC attraverso l'integrazione definita.

$$S_{AMP}=\int_{-10a}^{-\frac{5}{2}a}\left[-\frac{6}{5}x-\left(-\frac{2}{25a}x^2-\frac{7}{5}x\right)\right]dx=\left[\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{75a}x^3\right]_{-10a}^{-\frac{5}{2}a}=\frac{5}{24}a^2+\frac{50}{3}a^2=\frac{135}{8}a^2.$$

L'area rimanente S_{MPCD}, che si trova sotto alla parabola, si calcola per differenza tra l'area del triangolo ADC e l'area S_{AMP}:

$$S_{MPCD}=\frac{1}{2}\cdot 10a\cdot 12a-\frac{135}{8}a^2=\frac{345}{8}a^2.$$