ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

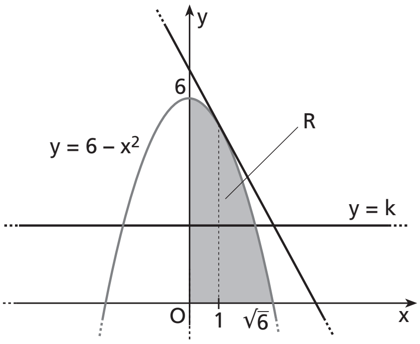
PROBLEMA 1

1. Le intersezioni della parabola $y = 6 - x^2$ con gli assi cartesiani nel primo quadrante si ricavano sostituendo $x = 0$, da cui si ricava il punto $(0; 6)$, e $y = 0$, da cui si ricava il punto $(\sqrt{6}; 0)$ perché bisogna considerare la sola soluzione positiva di $x^2 - 6 = 0$. Il volume del solido ottenuto ruotando la funzione $f(x)$ intorno all'asse y tra i punti di ordinata a e b è dato da:

$$\pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy.$$

In questo caso è $f(y) = \sqrt{6 - y}$, quindi

$$\pi \int_0^6 (\sqrt{6 - y})^2\, dy = \pi \int_0^6 (6 - y)\, dy = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^6 = \pi(36 - 18) = 18\pi.$$



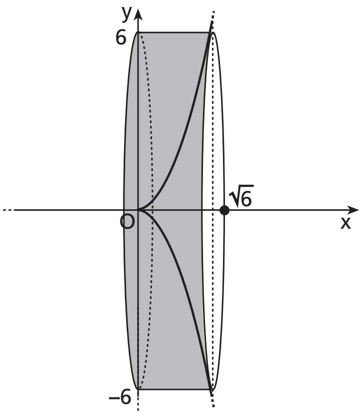
▲ **Figura 1.**

2. Per trovare il volume richiesto eseguiamo prima una traslazione di vettore $\vec{v}(0; -6)$ che porta la parabola con il vertice nell'origine e la retta $y = 6$ sull'asse x.
Si ha:

$$V = 36\pi\sqrt{6} - \pi \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2)^2\, dx =$$

$$= 36\pi\sqrt{6} - \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{6}} = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36}{5}\pi\sqrt{6}.$$

$$= \frac{144}{5}\pi\sqrt{6}.$$



▶ **Figura 2.**

3. L'area della parte finita del primo quadrante delimitata dalla retta $y = k$ e dalla parabola è data da $\int_0^b (6 - x^2 - k)\, dx$, dove b è l'ascissa dell'intersezione tra $y = k$ e $y = 6 - x^2$ del primo quadrante, se esiste. Tale ascissa si trova risolvendo $6 - k - x^2 = 0$. La soluzione positiva, e quindi il valore di b, è $\sqrt{6 - k}$ con $k \leq 6$. Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\left[6x - \frac{x^3}{3} - kx\right]_0^{\sqrt{6-k}} = \left[(6 - k)x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6-k}} = \frac{2}{3}(6 - k)^{\frac{3}{2}}$$

Tale valore deve essere uguale alla metà dell'area di R, che è

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

Uguagliando le due espressioni si ha:

$$2\sqrt{6} = \frac{2}{3}(6 - k)^{\frac{3}{2}}$$

$$6 - k = 3\sqrt[3]{2}$$

$$k = 6 - 3\sqrt[3]{2}.$$

4. Il triangolo considerato si trova nel primo quadrante ed è rettangolo. I suoi cateti sono uguali all'ascissa e all'ordinata dell'intersezione della retta tangente a λ rispettivamente con l'asse x e con l'asse y. La generica retta passante per un punto $(a; b)$ ha equazione

$$y - b = m(x - a).$$

In questo caso $a = t$, $b = 6 - t^2$ e m è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto di ascissa t, cioè la derivata di $y = 6 - x^2$ calcolata in t. Si ha $m = -2t$ e sostituendo

$$y - 6 + t^2 = (-2t)(x - t)$$

$$y = (-2t)x + t^2 + 6.$$

Sostituendo $x = 0$ si ottiene $y = t^2 + 6$, mentre sostituendo $y = 0$ si ottiene $x = \frac{t^2 + 6}{2t}$. Quindi l'area $A(t)$ vale:

$$A(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 6)\frac{t^2 + 6}{2t} = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t}.$$

Per $t = 1$ si ha $A(1) = \frac{49}{4}$.

5. Per trovare il valore di t per cui $A(t)$ è minima, calcoliamo la sua derivata

$$D(A(t)) = \frac{2(t^2 + 6)\,2t \cdot 4t - 4(t^2 + 6)^2}{16t^2} = \frac{3(t^2 + 6)(t^2 - 2)}{4t^2}.$$

La derivata si annulla, nel campo di esistenza stabilito, in $t = \sqrt{2}$. Inoltre per $0 < t < \sqrt{2}$ la derivata è negativa, mentre è positiva per $t > \sqrt{2}$, quindi in $t = \sqrt{2}$ c'è il punto di minimo richiesto.