ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base *ABC* della piramide sia lungo 4 cm:

1) calcolare la misura dello spigolo della base *MNP* del prisma, complanare ad *ABC*;
2) supposto che gli spigoli *AB* e *MN* siano paralleli, riferire il piano dei triangoli *ABC* e *MNP* a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in *A* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AB* e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta *AB* e passante per i punti *A*, *B*, *M* e verificare che passa pure per *N*;
4) dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo *ABC* nel triangolo *MNP* è una similitudine, trovarne le equazioni;
5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo *MNP* rispetto al triangolo *ABC*.

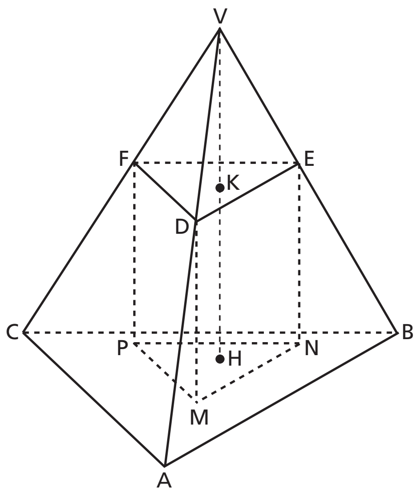
PROBLEMA 1

A) Nella figura 1 sono disegnati la piramide triangolare regolare, di base ABC equilatera e altezza VH, e il prisma triangolare inscritto nella piramide, di base DEF equilatera e altezza $KH = \frac{1}{2} VH$.

La piramide triangolare di vertice V e base DEF è simile alla piramide di base ABC e vertice V, con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$ per ipotesi, pertanto i volumi delle due piramidi hanno rapporto $k^3 = \frac{1}{8}$:

$$\text{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{8} \text{Vol}_{ABCV}.$$

Ora, la piramide $DEFV$ ha base e altezza congruenti al prisma inscritto di partenza: essa è quindi equivalente alla terza parte del prisma cioè $\text{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{3} \text{Vol}_{\text{prisma}}$. Sostituendo nella relazione precedente si trova:



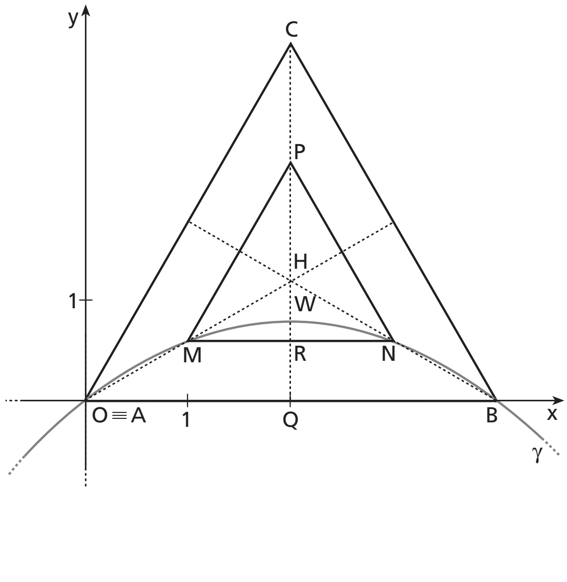
▲ **Figura 1.**

$$\frac{1}{3} \text{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{1}{8} \text{Vol}_{ABCV} \quad \rightarrow \quad \text{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{3}{8} \text{Vol}_{ABCV}.$$

In conclusione, il volume del prisma inscritto è $\frac{3}{8}$ del volume della piramide $ABCV$.

B1) Nel punto A) si è osservato che i triangoli equilateri MNP e ABC sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$. Se il lato di ABC misura 4 cm, il lato di MNP è lungo 2 cm.

B2) Nella figura 2 sono rappresentati i triangoli ABC e MNP nel sistema di assi cartesiani come richiesto.



◀ **Figura 2.**

I punti A e B hanno coordinate $A(0;\ 0)$ e $B(4;\ 0)$; il punto C ha ascissa $\frac{x_A + x_B}{2} = 2$ e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero ABC, ovvero $2\sqrt{3}$. Pertanto $C(2;\ 2\sqrt{3})$. Il punto H è ortocentro, incentro e baricentro del triangolo equilatero ABC e del triangolo equilatero MNP: esso divide la mediana CQ in due parti, una doppia dell'altra, per cui $H\left(2;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Per il rapporto di similitudine tra i due triangoli, risulta poi che M è punto medio di AH, come N lo è di BH e P di CH. Attraverso la formula del punto medio di un segmento si trova: $M\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(3;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P\left(2;\ \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

B3) Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$.

Poiché la parabola passa per i punti $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ e $M\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, si ottiene il sistema in a, b, c:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a + b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}x$. Essa passa per il punto N poiché tale punto è simmetrico al punto M della parabola, rispetto all'asse di simmetria. Diversamente si può verificare che le coordinate di N soddisfano l'equazione della parabola:

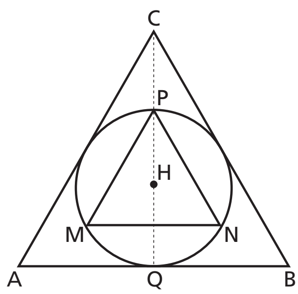
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3}\cdot 3 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della parabola.

B4) Nel punto A) è stato stabilito che i triangoli equilateri MNP e ABC sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$; nel punto B2) si era osservato che M è punto medio di AH, come N lo è di BH e P di CH (figura 2). Si può così dedurre che la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una particolare similitudine, ovvero un'omotetia di rapporto k e centro $H\left(2;\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$. Pertanto la trasformazione geometrica ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - 2) + 2 \\ y' = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

B5) La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero MNP ha centro nel circocentro H del triangolo e raggio $r = \overline{HP}$, cioè $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (figura 3).



▲ **Figura 3.**

Tale circonferenza coincide con la circonferenza inscritta nel triangolo equilatero ABC. Infatti quest'ultima ha centro in H e ha raggio $r' = \overline{HQ}$, cioè $r' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.