

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 1**

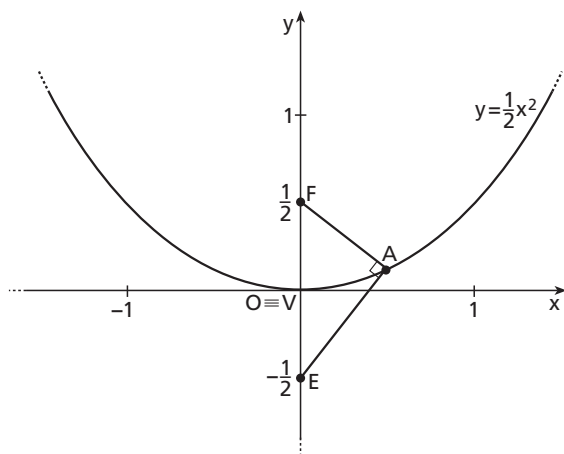
In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

- a) determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A ;
- b) chiamato P un generico punto della parabola p , trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p ;
- c) indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p , calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS , dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3 - \sqrt{3})$;
- d) stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 1**

a) Posto il vertice V della parabola p nell'origine del sistema cartesiano e il fuoco F sul semiasse positivo delle y , le coordinate di tali punti sono: $V(0; 0)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Perciò la parabola p ha equazione del tipo $y = \frac{1}{4f} x^2$, dove f è l'ordinata del fuoco, e ha espressione $y = \frac{1}{2} x^2$. Nella figura 1 è riportato il suo grafico.



▲ **Figura 1.**

Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V , esso ha coordinate $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Preso un generico punto A appartenente alla parabola, di coordinate $A\left(x; \frac{1}{2} x^2\right)$, affinché il triangolo AEF sia rettangolo in A è necessario che i punti E , F ed A appartengano a una semicirconferenza di diametro EF e centro V , ossia si abbia $FV \cong VA \cong VE$. Essendo:

$$\overline{VA}^2 = x^2 + \frac{1}{4} x^4$$

otteniamo:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VF}^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{4} x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 1 = 0.$$

L'equazione biquadratica ha come soluzioni $x = \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Pertanto esistono due punti della parabola, di coordinate

$$A_1\left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}; \frac{\sqrt{5} - 2}{2}\right) \quad \text{e} \quad A_2\left(-\sqrt{\sqrt{5} - 2}; \frac{\sqrt{5} - 2}{2}\right)$$

per cui i triangoli A_1EF e A_2EF sono retti in A_1 e A_2 .

b) Un generico punto della parabola p ha coordinate $P\left(x; \frac{1}{2}x^2\right)$. I restanti vertici del triangolo PEF sono $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Applicando le formule delle coordinate del baricentro di un triangolo, $x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$ e $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, si ottiene:

$$G \begin{cases} x_G = \frac{x}{3} \\ y_G = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}x^2. \end{cases}$$

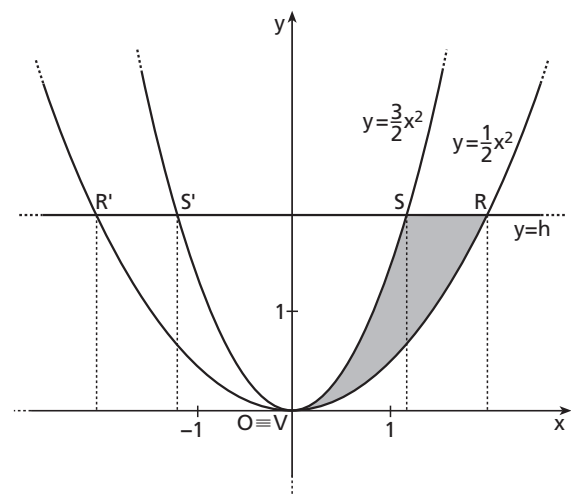
Le equazioni trovate sono parametriche in x e rappresentano il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p . L'equazione cartesiana del luogo si determina ricavando dalla prima equazione x e andando a sostituire la sua espressione nella seconda equazione.

$$\begin{cases} x = 3x_G \\ y_G = \frac{1}{6}(3x_G)^2 = \frac{3}{2}x_G^2. \end{cases}$$

Pertanto il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p è la parabola di equazione

$$y = \frac{3}{2}x^2.$$

c) Si tracciano nel sistema cartesiano i grafici dei luoghi p e k , di equazione rispettivamente $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{3}{2}x^2$, e una retta generica r di equazione $y = h$, con $h > 0$, perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p che interseca i luoghi nel primo quadrante nei punti R e S . Essi hanno coordinate $R(\sqrt{2h}; h)$ e $S\left(\sqrt{\frac{2}{3}h}; h\right)$ (figura 2).



► Figura 2.

Individuata sul grafico la figura mistilinea VRS , la sua superficie A si ottiene come la metà della differenza dei segmenti parabolici $S_{VRR'}$ e $S_{VSS'}$

$$A = \frac{1}{2}(S_{VRR'} - S_{VSS'}).$$

Si calcolano le superfici al secondo membro, ricordando che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del relativo rettangolo:

$$S_{VRR'} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2h} \cdot h) = \frac{4\sqrt{2}}{3}h\sqrt{h},$$

$$S_{VSS'} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}h} \cdot h\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}h\sqrt{h}.$$

Sostituendo, la superficie A diventa:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} b\sqrt{b} - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} b\sqrt{b} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) b\sqrt{b}.$$

Si ponga per ipotesi tale area uguale a $\frac{8}{9}(3 - \sqrt{3})$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) b\sqrt{b} = \frac{8}{9}(3 - \sqrt{3}) \quad \rightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \right) b\sqrt{b} = \frac{8}{9}\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad b\sqrt{b} = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad b^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad b = 2.$$

La retta r ha equazione $y=2$ e ha distanza dal vertice V , coincidente con l'origine del sistema cartesiano, pari a 2.

d) La distanza trovata $b=2$ è espressa da un numero razionale.