# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
## Sessione straordinaria

### PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola $p$ di vertice $V$ e fuoco $F$ tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento $VF$ sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con $E$ il punto simmetrico di $F$ rispetto a $V$ e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani ($Oxy$):

a) determinare l'equazione della parabola $p$ e stabilire se esiste un punto $A$ di $p$ tale che il triangolo $AEF$ sia rettangolo in $A$;

b) chiamato $P$ un generico punto della parabola $p$, trovare le coordinate del baricentro $G$ del triangolo $PEF$ e determinare l'equazione del luogo geometrico $k$ descritto dal punto $G$ al variare di $P$ su $p$;

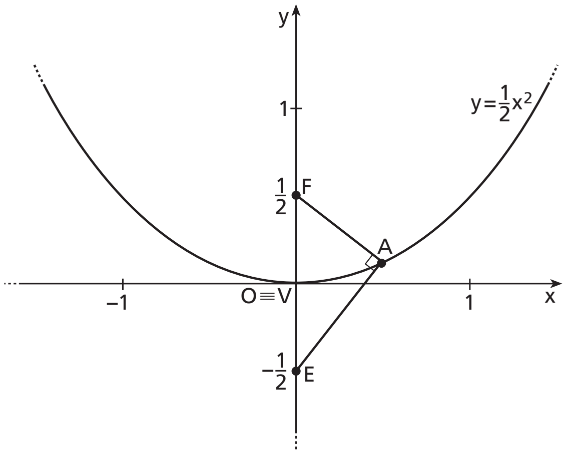
c) indicati con $R$ ed $S$ due punti appartenenti il primo alla parabola $p$ e il secondo al luogo $k$ e situati nel 1° quadrante su una retta $r$ perpendicolare all'asse di simmetria della parabola $p$, calcolare a quale distanza da $V$ bisogna condurre la retta $r$ affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento $RS$, dall'arco $VR$ della parabola $p$ e dall'arco $VS$ del luogo $k$ sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$;

d) stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

## PROBLEMA 1

**a)** Posto il vertice $V$ della parabola $p$ nell'origine del sistema cartesiano e il fuoco $F$ sul semiasse positivo delle $y$, le coordinate di tali punti sono: $V(0; 0)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Perciò la parabola $p$ ha equazione del tipo $y = \frac{1}{4f}x^2$, dove $f$ è l'ordinata del fuoco, e ha espressione $y = \frac{1}{2}x^2$. Nella figura 1 è riportato il suo grafico.




▲ **Figura 1.**

Indicato con $E$ il punto simmetrico di $F$ rispetto a $V$, esso ha coordinate $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Preso un generico punto $A$ appartenente alla parabola, di coordinate $A\left(x; \frac{1}{2}x^2\right)$, affinché il triangolo $AEF$ sia rettangolo in $A$ è necessario che i punti $E$, $F$ e $A$ appartengano a una semicirconferenza di diametro $EF$ e centro $V$, ossia si abbia $FV \cong VA \cong VE$. Essendo:

$$\overline{VA}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

otteniamo:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VF}^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 1 = 0.$$

L'equazione biquadratica ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.
Pertanto esistono due punti della parabola, di coordinate

$$A_1\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}; \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \quad \text{e} \quad A_2\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}; \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)$$

per cui i triangoli $A_1EF$ e $A_2EF$ sono retti in $A_1$ e $A_2$.

**b)** Un generico punto della parabola $p$ ha coordinate $P\left(x;\ \frac{1}{2}x^2\right)$. I restanti vertici del triangolo $PEF$ sono $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Applicando le formule delle coordinate del baricentro di un triangolo, $x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$ e $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, si ottiene:

$$G\begin{cases} x_G = \dfrac{x}{3} \\ y_G = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}x^2. \end{cases}$$

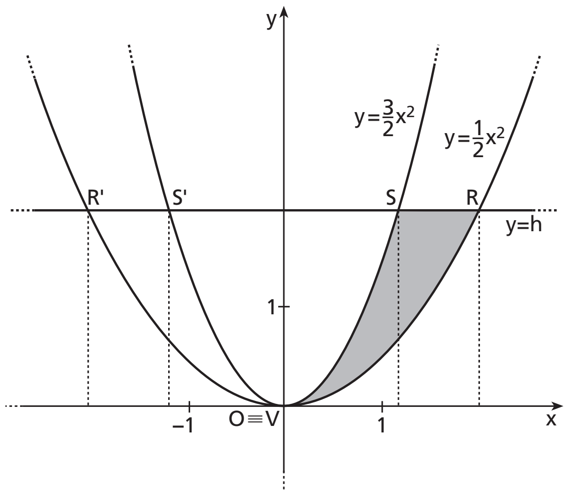
Le equazioni trovate sono parametriche in $x$ e rappresentano il luogo geometrico $k$ descritto dal punto $G$ al variare di $P$ su $p$. L'equazione cartesiana del luogo si determina ricavando dalla prima equazione $x$ e andando a sostituire la sua espressione nella seconda equazione.

$$\begin{cases} x = 3x_G \\ y_G = \dfrac{1}{6}(3x_G)^2 = \dfrac{3}{2}x_G^2 \end{cases}.$$

Pertanto il luogo geometrico $k$ descritto dal punto $G$ al variare di $P$ su $p$ è la parabola di equazione

$$y = \frac{3}{2}x^2.$$

**c)** Si tracciano nel sistema cartesiano i grafici dei luoghi $p$ e $k$, di equazione rispettivamente $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{3}{2}x^2$, e una retta generica $r$ di equazione $y = h$, con $h > 0$, perpendicolare all'asse di simmetria della parabola $p$ che interseca i luoghi nel primo quadrante nei punti $R$ e $S$. Essi hanno coordinate $R(\sqrt{2h};\ h)$ e $S\left(\sqrt{\frac{2}{3}h}\ ;\ h\right)$ (figura 2).




▶ **Figura 2.**

Individuata sul grafico la figura mistilinea $VRS$, la sua superficie $A$ si ottiene come la metà della differenza dei segmenti parabolici $S_{VRR'}$ e $S_{VSS'}$

$$A = \frac{1}{2}(S_{VRR'} - S_{VSS'}).$$

Si calcolano le superfici al secondo membro, ricordando che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del relativo rettangolo:

$$S_{VRR'} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2h} \cdot h) = \frac{4\sqrt{2}}{3}h\sqrt{h},$$

$$S_{VSS'} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}h} \cdot h\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}h\sqrt{h}.$$

Sostituendo, la superficie $A$ diventa:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} h\sqrt{h} - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} h\sqrt{h}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) h\sqrt{h}.$$

Si ponga per ipotesi tale area uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) h\sqrt{h} = \frac{8}{9}(3-\sqrt{3}) \quad \rightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) h\sqrt{h} = \frac{8}{9}\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad h\sqrt{h} = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad h^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad h = 2.$$

La retta $r$ ha equazione $y = 2$ e ha distanza dal vertice $V$, coincidente con l'origine del sistema cartesiano, pari a 2.

**d)** La distanza trovata $h = 2$ è espressa da un numero razionale.