

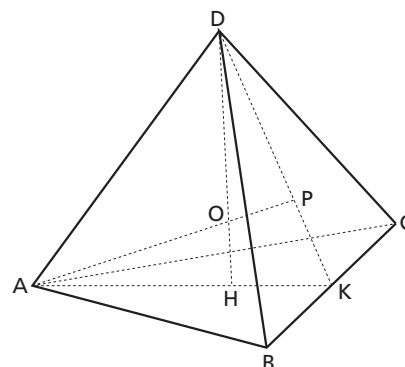
■ **PROBLEMA 1**

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D .

- Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T , trovare una relazione che legghi V , S ed r .
- Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T' .
- Condotto il piano α , contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E , e posto che uno spigolo di T sia lungo s , calcolare la distanza di E dalla retta AB .
- Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p .
- Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 1

- a) Detto s lo spigolo del tetraedro T , si ha che AK e DK sono le altezze di due facce di T (figura 1) e misurano $s \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le altezze AK e DK sono anche bisettrici e mediane. L'altezza DH cade nel baricentro del triangolo ABC , quindi $\overline{HK} = \frac{1}{3} \overline{AK} = s \frac{\sqrt{3}}{6}$. L'altezza DH si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo DHK (figura 2): risulta $\overline{DH} = s \sqrt{\frac{2}{3}}$.



► **Figura 1.**

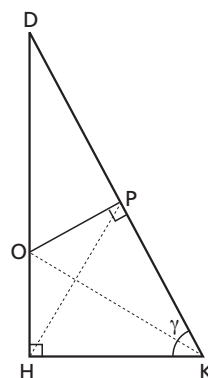
Le altezze del tetraedro si incontrano nel punto O , centro della sfera inscritta in T , che ha raggio $OH = OP = r$.

I triangoli rettangoli KOH e KOP sono congruenti, allora KO è la bisettrice di $\widehat{HKP} = \gamma$. Considerando il triangolo OHK , si può scrivere: $r = \overline{HK} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, ma $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{DH}}{\overline{HK}} = 2\sqrt{2}$, da cui, attraverso le formule di bisezione si giunge a: $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. In definitiva risulta: $r = \frac{s}{2\sqrt{6}}$.

La superficie del tetraedro è: $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s \right) = s^2 \sqrt{3} = r^2 \cdot 24\sqrt{3}$.

Il volume risulta: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \cdot s \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = r^3 \cdot 8\sqrt{3}$, da cui segue: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$.

▲ **Figura 2.**

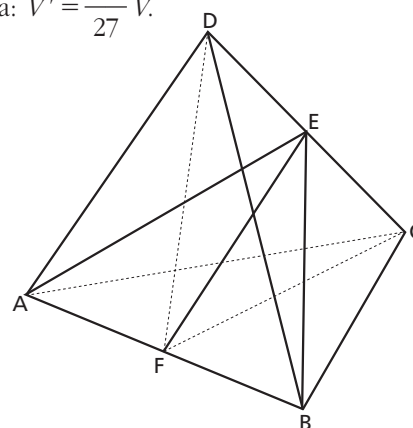


- b) HP è uno spigolo del tetraedro T' , con riferimento al triangolo HPK , nel quale si nota che $\widehat{KHP} = \widehat{KPH} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, si ha: $\frac{\overline{HP}}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\overline{HK}}{\operatorname{cos} \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \overline{HP} = 2 \cdot \overline{HK} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$. Dal valore di $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ si ricava $\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Allora $s' = \overline{HP} = 2 \cdot s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3}$, da cui si ha: $V' = \frac{1}{27} V$.

- c) Con riferimento alla figura 3, detto F il punto medio di AB , allora DF e CF sono le mediane delle facce ADB e ACB rispettivamente, il triangolo DFC è quindi isoscele e l'altezza EF è anche mediana: il piano α interseca CD nel punto medio E . AE è la mediana della faccia CAD , BE è la mediana della faccia CBD , quindi ABE è isoscele e la mediana EF è anche altezza. Dal teorema di Pitagora per AEF :

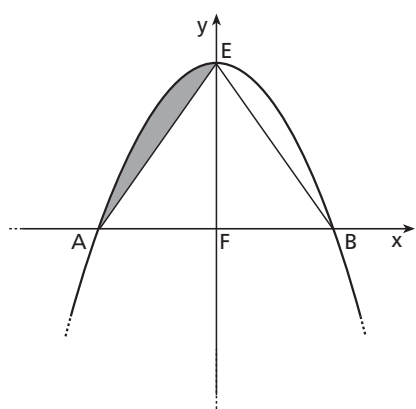
$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{\left(s \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2} = s \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

► **Figura 3.**



- d) Scelto il sistema di riferimento con origine nel punto F , asse delle ascisse coincidente con la retta orientata AB , asse delle ordinate coincidente con la retta orientata FE (figura 4), si scrive l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, passante per i punti $A\left(-\frac{s}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$, $E\left(0; s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{Risulta: } \begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{s}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + c \\ s\frac{\sqrt{2}}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b = 0 \\ c = s\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



◀ Figura 4.

- e) L'area del segmento parabolico ABE è $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$, l'area del triangolo ABE risulta $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$.

L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è quindi: $A = \frac{1}{2} \cdot (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \frac{s^2 \sqrt{2}}{24}$, che risulta pari a $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$ quando $s = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.