ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2010

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:

$y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

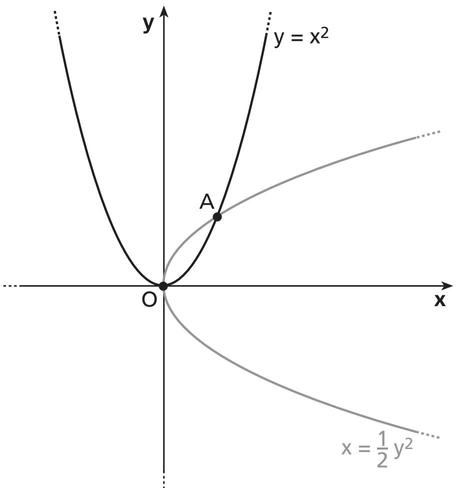
c) Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

PROBLEMA 2

a) La parabola di equazione $y^2 = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}y^2$, ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse, il vertice nell'origine di riferimento O. Il fuoco ha coordinate $\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 0\right)$ cioè $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{2}$. La parabola $y = x^2$ ha asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, il vertice nell'origine degli assi, il fuoco di coordinate $\left(0; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, ovvero, $\left(0; \frac{1}{4}\right)$, l'asse di simmetria di equazione $y = -\frac{1}{4}$ (figura 5).



▲ **Figura 5.**

Per determinare le coordinate del punto di intersezione A delle due parabole, risolviamo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x^4 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^3-2) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \\ y = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Ne segue quindi che il punto A ha coordinate $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$.

b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della duplicazione del cubo: esso consiste nella possibilità di costruire un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo l assegnato. Lo spigolo l' del cubo cercato deve soddisfare la relazione:

$$l'^3 = 2l^3 \text{ e quindi } l' = l\sqrt[3]{2}.$$

Tale problema, insieme con quello della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolubili con riga e compasso.

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

Per calcolare un valore approssimato di $\sqrt[3]{2}$, consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 2$ nell'intervallo $[1; 2]$. Essa è continua e derivabile e strettamente crescente, inoltre $f(1) = -2$ e $f(2) = 6$. In tale intervallo esiste un solo zero della funzione per il primo teorema dell'unicità dello zero. Utilizziamo il metodo delle tangenti per stimare tale zero della funzione e compiliamo la tabella seguente.

n	x_n	$f(x_n) = x^3 - 2$	$f'(x_n) = 3x^2$	$x_n - x_{n-1}$
0	2,000	6,000	12,000	
1	1,500	1,375	6,750	0,500
2	1,296	0,178	5,041	0,204
3	1,261	0,005	4,770	0,035
4	1,260	0,0004	4,763	0,001

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} è quindi 1,26.

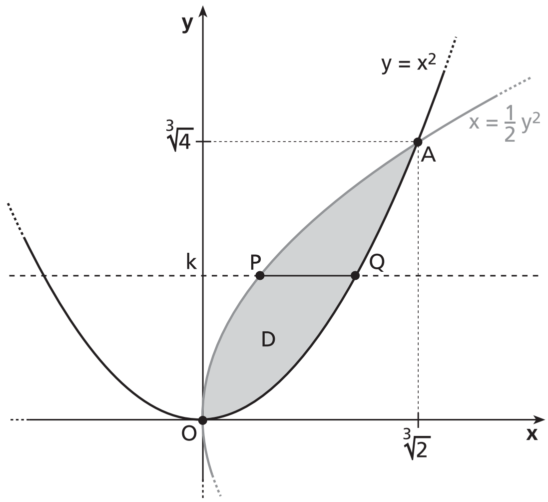
c) Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = k$. Affinché intersechi la regione di piano D evidenziata in figura 6 deve essere $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$.
Chiamati P e Q i punti intersezione della retta $y = k$ con le due parabole, risulta:

$$x_P = \frac{1}{2}k^2, \quad x_Q = \sqrt{k}, \quad \overline{PQ} = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2.$$

Occorre calcolare il massimo della funzione $f(k) = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2$ nel dominio $[0; \sqrt[3]{4}]$.

Per far ciò determiniamo la funzione derivata prima e il suo segno:

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k,$$



▶ **Figura 6.**

$$f'(k) > 0 \text{ per } 0 < k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad f'(k) = 0 \text{ per } k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad f'(k) < 0 \text{ per } \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < k < \sqrt[3]{4}.$$

La funzione ha pertanto un massimo in $k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e per tale valore la retta corrispondente $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ stacca sulla regione D il segmento di lunghezza massima.

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

d) Se si taglia il solido W, ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x (figura 7) con un piano ortogonale all'asse x, ovvero $x = h$, si hanno i seguenti casi:

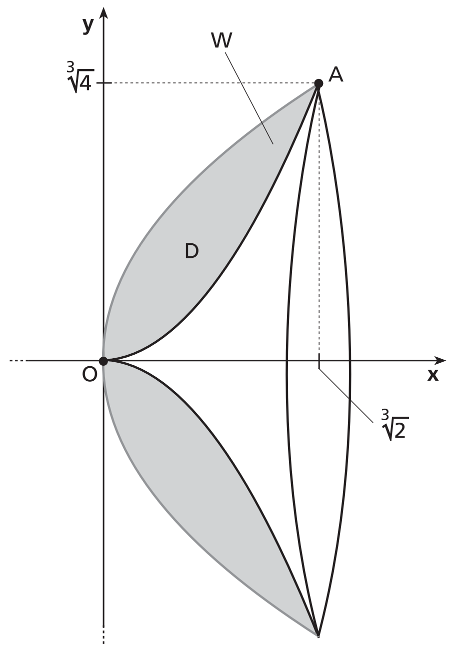
- per $h = 0$ si ottiene un punto;
- per $0 < h < \sqrt[3]{2}$ si ottiene una corona circolare;
- per $h = \sqrt[3]{2}$ si ottiene una circonferenza.

Il volume V del solido W vale:

$$V = \pi\left(\int_0^{\sqrt[3]{2}} (2x - x^4)dx\right) = \pi\left[x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \pi\left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right) = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi.$$

▼ **Figura 7.**



Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone